Spookje

Op het domein $\left[-\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi\right]$ worden de functies f en g gegeven door:

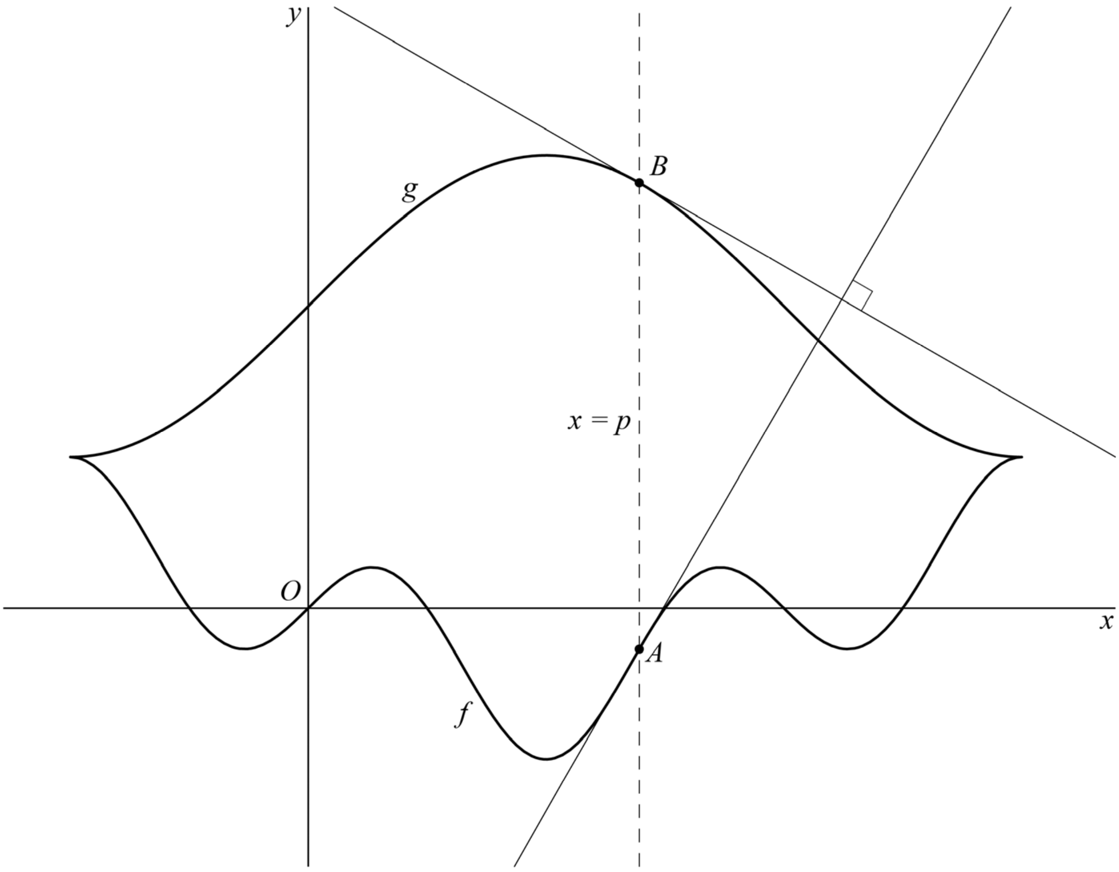
$$f(x) = \sin(x)\cos(2x)$$
$$g(x) = 2 + \sin(x)$$

Er geldt: $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$.

6p **2** Bewijs dat inderdaad geldt: $f'(x) = 6\cos^3(x) - 5\cos(x)$.

In de figuur zijn de grafieken van f en g weergegeven. De verticale lijn met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. We bekijken de raaklijn aan de grafiek van f in A en de raaklijn aan de grafiek van g in B.

figuur



In de figuur is een waarde van p gekozen waarvoor de twee raaklijnen elkaar loodrecht snijden. Er zijn meerdere waarden van p waarvoor dit het geval is.

6p **3** Bereken exact het **aantal** waarden van p waarvoor de twee raaklijnen elkaar loodrecht snijden.

Het functievoorschrift van f kan worden herleid tot:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x))$$

Dit kan bijvoorbeeld worden bewezen door de vorm $\sin(t+u) - \sin(t-u)$ voor een geschikte keuze van t en u te herleiden.

3p **4** Bewijs dat $\frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin(x)) = \sin(x)\cos(2x)$.

De grafieken van f en g hebben twee gemeenschappelijke punten, namelijk $\left(-\frac{1}{2}\pi, 1\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}\pi, 1\right)$.

V is het gebied dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g.

4p **5** Bereken exact de oppervlakte van V.